EXERCICE 3 **5 points**

$$A(0;4;16),\quad B(0;4;-10),\quad C(4;-8;0)\quad \text{et}\quad K(0;4;3).$$

1. **a.** On a $CK^2 = (4-0)^2 + (-8-4)^2 + (0-3)^2 = 16 + 144 + 9 = 169 = 13^2$, donc $CK = 13 \iff C \in \mathcal{S}$.

   b. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-12\\-16\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-12\\10\end{pmatrix}$

   D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 16+144-160 = 160-160 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires en C, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.** • $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 12-12+0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$;

   • $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 12-12+0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées sont égales mais pas les dernières), donc $\overrightarrow{n}$ normal deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan.

b. On sait qu'alors les coordonnées de $\vec{n}$ sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan (ABC).

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 3x + y + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Or par exemple :

$\text{C}(4\,;\,-8\,;\,0) \in (\text{ABC}) \iff 3 \times 4 + (-8) + d = 0 \iff 12 - 8 + d = 0 \iff d = -4$.

Finalement $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 3x + y - 4 = 0$.

3. **a.** Si D appartient à l'axe des abscisses son ordonnée et sa cote sont nuls, donc D a pour coordonnées $(x\,;\,0\,;\,;0)$.

De plus $\text{KD} = 13 \Rightarrow \text{KD}^2 = 13^2 = 169 = (x-0)^2 + (0-4)^2 + (0-3)^2 \iff (x-0)^2 + 16 + 9 = 169 \iff \iff x^2 = 144 \iff x^2 = 12^2 \iff x^2 - 12^2 = 0 \iff (x+12)(x-12) = 0 \left\{\begin{array}{rcl} x - 4 + 12 & = & 0 \\ x - - & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 12 & = & 0 \\ x - 12 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -12 \\ x & = & 12 \end{array}\right.$

Conclusion $\text{D}(12\,;\,0\,;\,0)$.

b. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\vec{n}$ normal à ce plan. On a donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{D}M} = t\,\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$. Cette égalité se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 12 & = & 3t \\ y - 0 & = & 1t \\ z - 0 & = & 0t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12 + 3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t \end{array}\right..$$

c. D appartient à Δ perpendiculaire au plan (ABC) ; cherchons les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) : I

I appartient au plan (ABC) et appartient à Δ, ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient donc l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de Δ soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 12 + 3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t \\ 3x + y - 4 & = & 0 \end{array}\right.$$

En remplaçant dans la dernière équation x et y par leurs valeurs en fonction de t on obtient $3(12 + 3t) + t - 4 = 0 \iff 36 + 9t + t - 4 = 0 \iff 10t + 32 = 0$

$\iff 10t = -32 \iff t = -\dfrac{32}{10} = -\dfrac{16}{5}$.

En reportant cette valeur dans les deux premières équations de Δ, on obtient :

$x = 12 - 3 \times \dfrac{16}{5} = \dfrac{60}{5} - \dfrac{48}{5} = \dfrac{12}{5}$; $y = -\dfrac{16}{5}$ et $z = 0$.

$\text{I}\left(\dfrac{12}{5}\,;\,-\dfrac{16}{5}\,;0\right)$.

On calcule $\text{DI}^2 = \left(\dfrac{12}{5} - 12\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5} - 0\right)^2 + 0^2 = \left(-\dfrac{48}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5}\right)^2 = \dfrac{2\,304}{25} + \dfrac{256}{25} = \dfrac{2\,560}{25} = \dfrac{256 \times 10}{25}$.

Finalement $\text{DI} = \sqrt{\dfrac{256 \times 10}{25}} = \dfrac{16\sqrt{10}}{5}$.

4. En prenant la base (ABC) rectangle en C : son aire est donc égale à : $\dfrac{\text{AC} \times \text{BC}}{2}$.

$\mathrm{AC}^2 = 16 + 144 + 256 = 416$; $\mathrm{AC} = \sqrt{416}$;

$\mathrm{BC}^2 = 16 + 144 + 100 = 260$; $\mathrm{BC} = \sqrt{260}$.

Donc $\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{\sqrt{416} \times \sqrt{260}}{2} = 52\sqrt{10}$

Donc avec $h = \dfrac{16\sqrt{10}}{5}$, on obtient :

$V = \dfrac{1}{3} \times 52\sqrt{10} \times \dfrac{16\sqrt{10}}{5} = \dfrac{1\,664}{3} \approx 554,7$ soit 555 à l'unité près.